

Exercice 1 Les opérateurs suivants ont-ils des valeurs propres ?

1. $S : l^2 \longrightarrow l^2$ (opérateur "shift") défini par

$$S : l^2 \longrightarrow l^2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

2. $T : l^2 \longrightarrow l^2$ défini par

$$T : l^2 \longrightarrow l^2 : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (1, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

Exercice 2 Montrer que la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto e^{-\frac{1}{2}(x+\frac{i}{2})^2}$$

est fonction propre de l'opérateur A défini par

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + ix$$

avec la valeur propre $\frac{5}{4}$.

Exercice 3

Dans l'espace $C^1PM([0, +\pi])$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

de domaine $D = \{f \in C^2([0, +\pi]) \text{ et } f(0) = f(+\pi) = 0\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 4

Dans l'espace $C^1PM([-\pi, +\pi])$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

de domaine $D = \{f \in C^2([-\pi, +\pi]) \text{ et } f(-\pi) = f(+\pi), f'(-\pi) = f'(+\pi)\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 5

Dans l'espace $C^1PM([0, \pi]; \mathbb{C})$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = 2ix \frac{d}{dx} + i$$

de domaine $D = \{f \in C^1([0, \pi]; \mathbb{C}) \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Cet opérateur est-il hermitien ?

Exercice 6 Dans l'espace $C_w([0, +\infty[; \mathbb{C})$, où w est la fonction poids $w(x) = e^{-x}$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = i \frac{d}{dx} - \frac{i}{2}$$

de domaine $D = \{f \in C_w([0, +\infty[; \mathbb{C}) \mid f \in C^1, \mathcal{A}(f) \in C_w([0, +\infty[; \mathbb{C}) \text{ et } f(0) = 0\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Montrer que cet opérateur n'a pas de fonctions propres.

Exercice 7

Dans l'espace $C_w([-\pi, +\pi]; \mathbb{C})$, où w est la fonction poids $w(x) = x^2$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = i \frac{d}{dx} + \frac{i}{x}$$

de domaine $D = \{f \in C_w([-\pi, +\pi]; \mathbb{C}) \mid f \in C^1 \text{ et } f(-\pi) = -f(+\pi)\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 8

Dans l'espace $C^1PM_w\left(\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right)$, où w est la fonction poids $w(x) = (3 - x^2)^2$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx} + \frac{2x}{3 - x^2}$$

de domaine $D = \{f \in C^1PM_w\left(\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right) \mid f \in C^1 \text{ et } f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(+\frac{\pi}{2}\right)\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.

Exercice 9 Dans l'espace $C^1PM([-\pi, +\pi]; \mathbb{C})$, on considère l'opérateur

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + 2i \frac{d}{dx} + 1$$

de domaine $D = \{f \in C^2([-\pi, +\pi]; \mathbb{C}) \mid f(+\pi) = f(-\pi) = 0\}$.

1. Cet opérateur est-il hermitien ?
2. Déterminer les valeurs propres et fonctions propres de cet opérateur.